ГАОУ ВО «Дагестанский государственный университет народного хозяйства»

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ

Миспахов Арсен Шарафидинович

Учебное пособие

Математика

Раздел: « Логарифмические уравнения и неравенства»

(для студентов 1 курса всех специальностей Бизнес-колледжа)

Махачкала 2018

УДК 51

ББК 22.143
Миспахов А.Ш. Учебное пособие по математике. Раздел: «Логарифмические уравнения и неравенства» – Махачкала: ДГУНХ, 2018г., 27 с.

Пособие содержит задачи и упражнения по всем основным темам раздела «Логарифмические уравнения и неравенства». По всем темам приведен в краткой форме теоретический материал. Подробные решения примеров помогут студентам при подготовке к практическим, лабораторным занятиям, при сдаче зачетов и экзаменов, а также для выполнения самостоятельных работ.

Учебное пособие по математике. Раздел: «Логарифмические уравнения и неравенства» размещен на сайте www.dgunh.ru.

Одобрено на заседании кафедры
математики 30 октября 2018г.,
протокол № 3
Зав. кафедрой к.ф.м.н., доцент
Назаров А.Д.

Содержание

1. Основные методы решения логарифмических уравнений и неравенств……....4

1.1. Применение определения логарифма…… ..4

1.2. Метод потенцирования……..…5

1.3. Применение основного логарифмического тождества……...6

1.4. Метод введения новой переменной ……7

1.5. Метод логарифмирования……9

2. Нестандартные методы решения логарифмических уравнений и неравенств……..10

2.1. Метод замены множителей……..10

2.2. Решение уравнений и неравенств за счет свойств, входящих в них функций……16

2.3. Использование числовых неравенств……21

Логарифмические уравнения и неравенства из вариантов ЕГЭ……. .22

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ……..24

Список использованной литературы……..29

1.Основные методы решения логарифмических уравнений и неравенств

1.1. Применение определения логарифма

$$\log_{\alpha} f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b$$

Напомним, что число x называется *логарифмом* числа bпо основанию a, если $a^x = b$.

Таким образом, по определению $a^{\log_a b} = b$.

Поскольку операция возведения в степень определена только при положительном основании степени,то логарифмы определены только при положительном основании. Кроме того, из того, что любая степень единицы равна единице, следует, что основание логарифма должно быть отличным от единицы. Любая степень положительного числа есть положительное число, поэтому логарифмы определены только для положительных чисел. Следовательно, функция $y = log_a x$определена при *x>0 и a>0,a≠1*. Это обстоятельство необходимо учитывать при решении уравнений, содержащих логарифмы, и начинать с определения области допустимых значений, учитывая, что все выражения, от которых берутся логарифмы, должны быть положительны.

Отметим, что из определения логарифма следует, что$\log_a a = 1$ для любого a, при котором определен логарифм.

Напомним основные свойства логарифмов:

$$\log_c(a \cdot b) = \log_c a + \log_c b$$

$$\log_c(\frac{a}{b}) = \log_c a - \log_c b$$

$$\log_c a^n = n \cdot \log_c a$$

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

$$\log_c \frac{1}{a} = -\log_c a$$

Пример 1.1. Решить уравнение.

$$\log_{x+1}(x^2 + x - 6)^2 = 4$$

ОДЗ:$\begin{cases} (x^2 + x - 6)^2 > 0 \\ x + 1 > 0 \\ x + 1 \neq 1 \end{cases}$

$$(x + 1)^4 = (x^2 + x - 6)^2$$

$$(x^2 + 2x + 1)^2 = (x^2 + x - 6)^2$$

$$\begin{cases} x^2+2x+1=x^2+x-6, \\ x^2+2x+1=-x-x^2+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-7 \\ x=1 \\ x=-2{,}5 \end{cases}$$

с учетом ОДЗ, корень уравнения равен 1

Отв:1

Пример 1.2. Решить уравнение.

$$\log_{9x^2}(6+2x-x^2)=\frac{1}{2}$$

ОДЗ: $\begin{cases} 6+2x-x^2>0 \\ 9x^2\neq 1 \\ x=0 \end{cases}$

$$\sqrt{9x^2}=6-2x-x^2$$

$$|3x|=6-2x-x^2$$

$$\begin{cases} 3x=6+2x-x^2 \\ 3x=-6-2x+x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ x=2 \\ x=6 \\ x=-1 \end{cases}$$

с учетом ОДЗ $x=-1, x=2$

ответ: -1;2

Пример 1.3. Решить уравнение.

$$2\log_{0,2}\ x=\log_{0,2}(5x^2-x)$$

ОДЗ: $\begin{cases} x>0 \\ 5x^2-x>0 \end{cases}$

$$\log_{0,2}\ x^2=\log_{0,2}(5x^2-x),$$

$$x^2=5x^2-x, 4x^2-x=0, x=0, x=\frac{1}{4}$$

$x=0$не удовлетворяет ОДЗ.

Ответ: $\frac{1}{4}$

1.2. Метод потенцирования

Потенцирование, то есть переход от уравнения$\log_{f(x)}\varphi(x)=\log_{f(x)}\omega(x)$к уравнению $\varphi(x)=\omega(x)$.

Здесь следует иметь в виду, что эти уравнения, возможно, неравносильны. Второе уравнение может иметь корни, не входящие в ОДЗ первого, для которых $f(x)\leq 0, f(x)=1$ или $\varphi(x)=\omega(x)\leq 0$.

Пример 1.4. Решить уравнение.

lg5+ lg(x+10)=1-lg(2x-1)+lg(21x-20)

Решение:

ОДЗ определено условиями условием: $\begin{cases} x+10>0 \\ 2x-1>0 \\ 21x-20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-10 \\ x>\frac{1}{2} \\ x>\frac{20}{21} \end{cases}$

Заменим единицу на lg10 и используем формулы суммы и разности логарифмов. Получим уравнение

$$\lg\big(5(x+10)\big) = \lg\frac{10(21x-20)}{(2x-1)}$$

Потенцирование и сокращение на 5 приводит к уравнению

$$x+10 = \frac{2(21x-20)}{2x-1}$$

После приведения к общему знаменателю и приведения подобных членов получаем уравнение

$$2x^2 - 23x + 30 = 0$$

Корнями, которого являются числа $x_1 = 10, x_2 = \frac{3}{2}$, оба входящие в ОДЗ

Ответ: $x_1 = 10, x_2 = \frac{3}{2}$

1.3. Применение основного логарифмического тождества

При применении основного логарифмического тождествапроисходит переход от уравнения $f(x)^{\log f(x)\varphi(x)} = \omega(x)$ к уравнению $\varphi(x) = \omega(x)$. Здесь также могут появиться посторонние корни.

Пример 1.5. Решить уравнение.

$$5^{log_5 x} \cdot \lg 4 = \lg(2 \cdot 9^x - 6^x)$$

Решение: применив основное логарифмическое тождество $a^{log_a b} = b$, и формулу $nlog_c a = log_c a^n$, получим

$$\lg 4^x = \lg(2 \cdot 9^x - 6^x)$$

Потенцирование этого уравнения приводит к однородному показательному уравнению

$$4^x = 2 \cdot 9^x - 6^x$$

Разделим обе части уравнения на 9^x и обозначим $\frac{2}{3}^x = y > 0$. Полученное при этом квадратное уравнение $y^2 + y - 2 = 0$ имеет корни $y_1 = 1, y_2 = -2$. Второй корень посторонний , поэтому $\frac{2}{3}^x = 1, x = 0$ – решение однородного показательного уравнения. Так как $x = 0$ не входит в ОДЗ данного уравнения, то задача не имеет решений.

1.4. Метод введения новой переменной

Распространенным методом решения уравнений и неравенств вообще, и логарифмических в частности, служит замена переменных (метод подстановки). Чаще всего этот метод используется, когда уравнение или неравенство является квадратным относительно функции, содержащей искомую переменную. Ниже рассмотрим некоторые виды замены переменной, позволяющие значительно упростить или ускорить получение решения уравнений содержащих кроме логарифмической другие комбинации функций.

Пример 1.6.Найти произведение корней уравнения.

$$\lg(-x) = \frac{3}{\lg x^2}$$

ОДЗ: $x < 0, x \neq 1$

$\lg x^2 = 2\lg|x| = 2\lg(-x)$,так как $x<0$

$$\frac{\lg(-x)}{6} = \frac{3}{2\lg(-x)}, lg\ ^2(-x) = 9$$

$\log(-x) = 3$ или $\log(-x) = -3, x = -1000, x = -0{,}001$

Произведение корней равно 1

Ответ:1

Пример 1.7. Решить уравнение.

$$7^{\log_7 x^{2\log_7 x}} = 8x^{\log_7 x} - 7$$

$$x^{2\log_7 x} - 8x^{\log_7 x} + 7 = 0$$

$$t = x^{\log_7 x}$$

ОДЗ:$x = 0, t > 0$

$$t^2 - 8t + 7 = 0$$

$$t_1 = 1; t_2 = 7$$

$x^{\log_7 x} = 1; x^{\log_7 x} =$

7 Прологарифмируем оба уравнеия по основанию 7: $\log_7 x^{\log_7 x} = \log_7 1$; $\log_7 x^{\log_7 x} = \log_7 7$

$$\log_7 x \log_7 x = 0;\ \log_7 x \log_7 x = 1$$

$$\log_7 x = 0;\quad \begin{cases} \log_7 x = 1 \\ \log_7 x = -1 \end{cases}$$

$$x = 1;\quad \begin{cases} x = 7 \\ x = \frac{1}{7} \end{cases}$$

Ответ:$x = 1, x = 7, x = \frac{1}{7}$

Пример 1.8.Решить уравнение.

$$\frac{\log_2 x}{\log_2 3}+\frac{\log_2 x}{\log_2 4}=2$$

$$\log_2 x=t$$

ОДЗ:*x>0, t>0*

$$\frac{t}{\log_2 3}+\frac{t}{2}=2/2\log_2 3$$

$$2t+t\log_2 3=4\log_2 3$$

$$t(2+\log_2 3)=4\log_2 3$$

$$t=\frac{4\log_2 3}{2+\log_2 3}=\frac{4\log_2 3}{\log_2 4+\log_2 3}=\frac{4\log_2 3}{\log_2 12}=4\log_{12} 3=\log_{12} 81$$

$$\log_2 x=\log_{12} 81$$

$$x=2^{\log_{12} 81}$$

Ответ: $x=2^{\log_{12} 81}$

Переход к новому основанию

Пример 1.9.Решить уравнение.

$$\log_{x^2} 16+\log_{2x} 64=3$$

Решение.

ОДЗ определяется исходя из того, что основание логарифма должно быть положительным и отличным от единицы. Это дает набор условий:

$$\begin{cases}2x>0\\2x\neq 1\\x^2\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\x\neq 1\\x\neq\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

Поскольку 16=2^4, а 64=2^6, удобно перейти к логарифмам по основанию 2:

$$\frac{\log_2 16}{\log_2 x^2}+\frac{\log_2 64}{\log_2 2x}=3$$

Обозначим $y=\log_2 x$. Получаем уравнение

$$\frac{2}{y}+\frac{6}{y+1}=3$$

После очевидных преобразований получаем уравнение

$$3y^2-5y-2=0$$

Корни этого уравнения равны $y_1=2, y_2=-\frac{1}{3}$. Это дает два уравнения для нахождения *x*.

$$\log_2 x=2 \text{ или } \log_2 x=-\frac{1}{3}$$

Потенцируя, получаем корни $x_1=4, x_2=2^{-\frac{1}{3}}$, входящие в ОДЗ.

Ответ: $x_1=4, x_2=2^{-\frac{1}{3}}$

Рассмотренные примеры показывают, что замена переменной эффективный прием решения логарифмических уравнений и неравенств.

Преимущество такого приема наиболее ярко проявляется при решении уравнений и неравенств, представляющих комбинацию логарифмических и показательных функций.

1.5. Метод логарифмирования

Метод логарифмирования заключается в том, что обе части равенства или неравенства, если они положительные, можно прологарифмировать по одному основанию (в неравенствах, учитывать при этом монотонность функции).

Пример 1.10.Решить уравнение.

$$x^{lg^2x-5\cdot lgx} = 0{,}0001$$

Решение.

ОДЗ определено условием *x>0.* Учитывая, что lg 0,0001=$\lg 10^{-4} = -4\lg 10 = -4$, получаем

$$x^{\lg^2 x-5\lg x} = -4$$

Обозначим $y = \lg^2 x$. Получаем уравнение $y^2 - 5y + 4 = 0$. Корни этого уравнения $y_1 = 4$; $y_2 = 1$. Это дает два уравнения для *x*

$$\lg^2 x = 4 \text{ и } \lg^2 x = 1$$

Следовательно,

$$\lg x = \pm 2 \text{ или } \lg x = \pm 1$$

Потенцируя, получаем четыре уравнения: $x_1 = 10^2, x_2 = 10^{-2}, x_3 = 10, x_4 = 10^{-1}$. Все корни входят в ОДЗ.

Ответ: $x_1 = 10^2, x_2 = 10^{-2}, x_3 = 10, x_4 = 10^{-1}$

2. Нестандартные способы решения логарифмических уравнений и неравенств

2.1. Метод замены множителей

Данный метод позволяет нам решение неравенства повышенной сложности свести к решению рациональных неравенств.

Любое неравенство можно привести к виду:

$$\frac{u_1 \cdot u_2 \cdot \ldots \cdot u_n}{v_1 \cdot v_2 \cdot \ldots \cdot v_k} V 0$$

Здесь символ «V» означает один из четырех возможных знаков неравенства: $<, \leq, >, \geq$; $u_n v_k$ - комбинация функций неизвестной переменной (сложная функция). В основе рассматриваемого метода лежат два равносильных утверждения:

Утверждение 1.Функция $f(x)$есть строго возрастающая, тогда и только тогда, когда для любых значений t_1и t_2 из области определения функции$(t_1 - t_2)$ совпадает по знаку с разностью$(f(t_1) - f(t_2))$

Утверждение 2 . Функция $f(x)$есть строго убывающая, тогда и только тогда, когда для любых значений t_1и t_2 из области определения функции разность совпадает по знаку с разностью$(\mathrm{f}(\mathrm{t}_2) - \mathrm{f}(\mathrm{t}_1))$

Здесь и дальше по тексту t – функция неизвестной переменной.

Равносильность утверждений 1 и 2 следует из того факта, что если $\mathrm{y} = \mathrm{f}(\mathrm{x})$есть монотонно возрастающая функция, то $\mathrm{y} = -\mathrm{f}(\mathrm{x})$есть монотонно убывающая.

Если нам неудобно работать с данным множителем, мы можем заменить его на другой знакосовпадающий с ним в области определения неравенства(имеющий в этой области те же корни). Этот факт и определяет основную идею метода замены множителей.

Показательная и логарифмическая функции и вызываемые ими замены

Показательная функция $\mathrm{y} = \mathrm{a}^{\mathrm{t}}$, как известно строго убывает при $0 < a < 1$ и строго возрастает при $\mathrm{a} > 1$. Поэтому, в частности, для $\mathrm{a} = 10$ получаем

$$10^{\mathrm{t}_1} - 10^{\mathrm{t}_2} \leftrightarrow \mathrm{t}_1 - \mathrm{t}_2$$

Для произвольного основанияa , пользуясь основным логарифмическим тождеством, можно увидеть что

$$a^{t_1} - a^{t_2} \leftrightarrow (10^{\log a})^{t_1} - (10^{\log a})^{t_2} \leftrightarrow 10^{t_1 \log a} - 10^{t_2 \log a}$$

Откуда

$$a^{t_1} - a^{t_2} \leftrightarrow t_1 \cdot \log a - t_2 \cdot \log a$$

то есть

$$a^{t_1} - a^{t_2} \leftrightarrow (t_1 - t_2) \cdot \log a$$

Функция $y = \log x$ – строго возрастающая. Поэтому с учетом ОДЗ

$$x_1 - x_2 \leftrightarrow \log x_1 - \log x_2$$

При $x_1 = a$и $x_2 = 1$ получаем $a - 1 \leftrightarrow \log a - \log 1$, те есть

$$\log a \leftrightarrow a - 1$$

Тогда соотношение $a^{t_1} - a^{t_2} \leftrightarrow (t_1 - t_2) \cdot \log a$принимает вид

$$a^{t_1} - a^{t_2} \leftrightarrow (t_1 - t_2) \cdot (a - 1)$$

Таким образом, мы установили, что разность степеней с одним и тем же основанием всегда по знаку совпадает с произведением разности показателей этих степеней на разность основания и единицы.

Для логарифмической функции $y = \log_a t$ аналогично устанавливаем, что

$$\log_a t_1 - \log_a t_2 = \frac{\log t_1}{\log a} - \frac{\log t_2}{\log a} = \frac{(\log t_1 - \log t_2)}{\log a}$$

Отсюда следует, что

$$\log_a t_1 - \log_a t_2 = \frac{\log t_1 - \log t_2}{\log a} = \frac{t_1 - t_2}{a - 1}$$

То есть разность логарифмов по одному и тому же основанию всегда по знаку совпадает с отношением разности подлогарифмических выражений к разности основания единицы:

$$\log_a t_1 - \log_a t_2 = \frac{t_1 - t_2}{a - 1}$$

Исходя из этого, образуются полезные схемы решения основных показательных и логарифмических неравенств:

1) $a^f > a^g \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ (f - g)(a - 1) = 0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} a^f > b \\ b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow (f - \log_a b)\,(a - 1) > 0$

3) $\log_a f > \log_a g \Leftrightarrow \begin{cases} (f - g)(a - 1) > 0 \\ f > 0 \\ g > 0 \\ a > 0 \end{cases}$

4) $\log_a f > b \Leftrightarrow \begin{cases} (f - a^b)(a - 1) > 0 \\ f > 0 \\ a > 0 \end{cases}$

5) $\log_a f - \log_a g > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (fg-1)(a-1) > 0 \\ f > 0 \\ g > 0 \\ a > 0 \end{cases}$

6) $\frac{a^{f_1}-a^{f_2}}{a^{g_1}-a^{g_2}} > 0 \Leftrightarrow \frac{f_1-g_1}{f_2-g_2} > 0$

Пример 2.1. Решить неравенство

$$\frac{(8-x^3)\cdot(2^x-1)\cdot\left(\sqrt{x+20-\sqrt{2x-30}}\right)\cdot(|x-2|-|4+x^2|)}{(|x|^{2x-1}-|x|^{5-x})\cdot(\log_{x-20}(12-|x|)-\log_{x+20}(20-|x|))\cdot\log_5 x^2} < 0$$

Решение.

Первый множитель в числителе $(8-x^3)$ имеет вид $\left(t_1^{2k-1}-t_2^{2k-1}\right)(k=2)$, который совпадает с разностью(t_1-t_2). Поэтому$(8-x^3)$ заменяем на $(2-x)$

Множитель (2^x-1)имеет вид $(a^{t_1}-a^{t_2})$где $a=2, t_1=x, t_2=0$, который знакосовпадает с $(t_1-t_2)\cdot(a-1)$. Поэтому множитель 2^x-1 заменяем на x.

Множитель $\left(\sqrt{x+20-\sqrt{2x+30}}\right)$имеет вид $(\sqrt{t_1}-\sqrt{t_2})$который знакосовпадает с (t_1-t_2), поэтому заменяем его на $\big((x+20)-(2x-30)\big)$.

Множитель $(|x-2|-|4-x^2|)$имеет вид (t_1-t_2), где $t_1 \geq 0$ и $t_2 = x^2+4 \geq 0$поэтому (t_1-t_2) знакосовпадает с $(t_1^2-t_2^2)$. И так как$|x-2|^2 = (x-2)^2$, то указанный множитель заменяем на$((x-2)^2-(x^2+4)^2)$.

В знаменателе первый множитель $(|x|^{2x-1}-|x|^{5-x})$ имеет вид $(a^{t_1}-a^{t_2})$, который по знаку совпадает с $(t_1-t_2)\cdot(a-1)$. Поэтому этот множитель знакосовпадает с произведением $\big((2x-1)-(5-x)\big)\cdot(x^2-1)$. И так как $(|x|^2-1)$знакосовпадает с $(|x|^2-1)=(x^2-1)$, то окончательно получаем, что первый множитель можно заменить на $((2x-1)-(5-x))\cdot(x^2-1)$.

Второй множитель в знаменателе имеет вид $(\log_a t_1-\log_a t_2)$, который совпадает с произведением $(t_1-t_2)\cdot(a-1)$. Поэтому сначала этот множитель заменяем на

$$\big((12-|x|)-(20-2|x|)\big)\cdot(x+20-1) = (|x|-8)\cdot(x-19)$$

И так как $|x|-8$ знакосовпадает с x^2-8^2, то второй множитель в знаменателе заменяем на $(x+8)(x-8)\cdot(x-19)$.

Последний множитель $\log_3 x^2$имеет видa^3, который знакосовпадает с a. И так как $a=\log_3 x^2$ имея вид$\log_3 t_1-\log_3 t_2$, $t_1=x^2, t_2=1$ знакосовпадает с(x^2-2) то заменяем последний множитель на (x^2-2)

Окончательно после всех замен устанавливаем, что исходное неравенство в своей области определения равносильно неравенству

$$\frac{(2-x)\cdot x\cdot(-x-10)\cdot\left(x-2-(x^2-4)\right)(x-2-x^2+4)}{(3x-6)\cdot(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x-8)\cdot(x+8)\cdot(x+19)\cdot(x^2-1)}<0$$

Очевидно, что область определения левой части неравенства задается системой $\begin{cases} x\neq 0 \\ 20-2|x|>0 \end{cases}$

То есть область одновременного существования всех множителей представляет с собой два промежутка: $-10<x<0$ и $0<x<10$. В этой области множители $(-x-10)$ и $(x+19)$знакопостоянны, и поэтому их можно заменить на (– 1) и на 1 соответственно. Знакопостоянны в области определения и квадратные трехчлены $(-x^2-x-6)$и (x^2-x-2). Поэтому заменяя их на (– 1) и на 1, устанавливаем, что:

$$\begin{cases} \dfrac{(-1)(x-2)x(-1)(-1)}{3(x-2)(x-1)^2(x-8)(x+8)}<0 \\ -10<x<0 \text{ или } 0<x<10 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} -8<x<-1 \\ -1<x<0 \\ 8<x<10 \end{array}\right.$$

Ответ: $(-8;1)\cup(-1;0)\cup(8;10)$

Пример 2.2. Решить неравенство

$$\log_{2x}(2x^2-4x+6)\leq\log_{2x}(x^2+x)$$

Решение:

$\log_{2x}(2x^2-4x+6)\leq\log_{2x}(x^2+x)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} (2x-1)(2x^2-4x+6-x^2-x)\leq 0 \\ 2x>0 \\ x\neq\dfrac{1}{2} \\ 2x^2-4x+6>0 \\ x^2-x>0 \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} (2x-1)(x^2-5x+6)\leq 0 \\ x>0 \\ x\neq\frac{1}{2} \\ x(x+1)>0 \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} \left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)(x-3)\leq 0 \\ x>0 \\ x\neq\frac{1}{2} \end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} 0<x<\frac{1}{2} \\ 2\leq x\leq 3 \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(0;\frac{1}{2}\right)\cup(2;3)$

Пример 2.3. Решить неравенство.

$\log_{7-x}(x^2-5x+6)-\log_{7-x}(2x-4)>0$

Решение.

$\log_{7-x}(x^2-5x+6)-\log_{7-x}(2x-4)>0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(7-x-1)(x^2-5x+6-2x-4)>0\\ 7-x>0\\ x^2-5x+6>0\\ 2x-4>0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(6-x)(x-2)(x-5)>0\\ x<7\\ (x-2)(x-3)>0\\ x>2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-6)(x-2)(x-5)<0\\ x<7\\ x-3>0\\ x>2\end{cases}\Leftrightarrow 5<x<6$$

Ответ: (5;6)

Пример 2.4.Решить неравенство.

$$\frac{\log_x(x-3)-\log_x(9-x)}{\log_{x-1}x}<0$$

Решение.

Для решения этого неравенства вместо знаменателя запишем$(x-1-1)(x-1)$, а вместо числителя $(x-1)(x-3-9+x)$.

$$\frac{\log_x(x-3)-\log_x(9-x)}{\log_{x-1}x}<0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{(x-1)(x-3-9-x)}{(x-1-1)(x-1)}<0\\ x>0\\ x-1>0\\ x-3>0\\ 9-x>0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x-6}{x-2}<0\\ x>1\\ x-3>0\\ 9-x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x-6}{x-2}<0\\ 3<x<9\end{cases}\Leftrightarrow 3<x<6$$

Ответ: (3;6)

Пример 2.5. Решить неравенство

$$\log_x(x-1)<\log_{\frac{1}{x}}(2-x)$$

Решение.

$\log_x(x-1)<\log_{\frac{1}{x}}(2-x)\Leftrightarrow\log_x\frac{1}{2-x}-\log_x(x-1)>0$

После замены $\log_a(f)-\log_a(g)\leftrightarrow(f-g)(a-1)$ получим:

$$\begin{cases}\left(\frac{1}{2-x}-(x+1)\right)(x-1)>0\\ 2-x>0\\ x+1>0\\ x>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x^2-x-1)(x-1)\le 0\\ 0<x<2\end{cases}$$

В области определения неравенства знаменатель дроби $x-2<0$ поэтому

$$\begin{cases}\left(x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)(x-1)\left(x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)>0 \Leftrightarrow 0<x<1;\frac{1+\sqrt{5}}{2}<x<2\\ 0<x<2\end{cases}$$

Ответ: (0;1)U($\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; 2)

Пример 2.6. Решить неравенство.

$$\log_x \log_2(4^x-12)\le 1$$

Решение.

$$\log_x \log_2(4^x-12)\le 1 \Leftrightarrow \begin{cases}\log_x \log_2(4^x-12)-\log_x x\\ x>0\\ x\ne 1\end{cases} \Leftrightarrow$$

Замена (12) приводит к системе:

$$\begin{cases}\log_2\big((4^x-12)-x\big)(x-1)\le 0\\ \log_2(4^x-12)>0\\ x>0\\ x\ne 1\end{cases}$$

$$\begin{cases}(4^x-2^x-12)(x-1)\le 0\\ 4^x>12\\ x>0\\ x\ne 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(2^{2x}-2^x-12)(x-1)\le 0\\ x>\log_4 12\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}(2^x-3)(2^x-4)(x-1)\le 0\\ x>\log_4 12\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(2^x+3)(2^x-2^2)(x-1)\le 0\\ x>\log_4 12\end{cases}$$

$$\begin{cases}(x-2)(x-1)\le 0\\ x>\log_4 12\end{cases} \Leftrightarrow \quad \log_4 12<x\le 2$$

Ответ: $\log_4 12\,;2$

Представленные примеры убедительно демонстрируют возможности метода замены множителей при решении достаточно сложных неравенств.

Для удобства использования целесообразно привести сводку наиболее употребляемых замен:

1) $\lvert t\rvert = t^2$	2)$\lvert t_1\rvert$- $\lvert t_2\rvert$ = t_1^2- t_2^2
3)at^2-bt +c↔ a,при$D = b^2 - 4ac$ <0	4)$\sqrt{t_1}$-$\sqrt{t_2}$ ↔ $t_1 - t_2$
5)$\lvert t_1\rvert$-$\sqrt{t_2}$ ↔ t_1^2-t_2	6)$\lvert t\rvert$ - $(at^2 - bt - c)$↔ t^2- $(at^2 + bt +$

	$c)^2$
7)$a^{t_1} - a^{t_2} \leftrightarrow (t_1 - t_2)(a-1)$	8) $a^2 - 1 \leftrightarrow t_2(a-1)$
9) $f - g \leftrightarrow f^2 - g^2$при $f \geq 0$ и $g \geq 0$	10) $\log_a f \leftrightarrow (f-1)(a-1)$
11) $\log_a f - g \leftrightarrow (f - a^2)(a-1)$	12) $\log_a f - \log_a g \leftrightarrow (f-g)(a-1)$

2.2. Решение уравнений и неравенств за счет свойств, входящих в них функций.

Имеется довольно много уравнений и неравенств, которых можно решать за счет свойств, входящих в них функций. Этот метод дает возможность решить уравнение или неравенство проще, чем с помощью стандартных методов. Существует несколько таких нестандартных методов:

- *Использование областей существования функций*

Анализ области определения уравнения или неравенства в некоторых случаях позволяет существенно упростить процедуру нахождения решений.

Так, если множество, на котором определены обе части уравнения, окажется пустым множеством, то ответ в этом случае ясен – уравнение не имеет решений.

Пример2.7. Решить уравнение

$$\log_3(x-2) = \sqrt{2-x}$$

Решение.

Условия для нахождения ОДЗ имеет вид:

$$\begin{cases} 2 - x \geq 0 \\ x - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x > 2 \end{cases}$$

Система решений не имеет, т.е. ОДЗ уравнения – пустое множество.

Ответ: нет решений

Если множество состоит из одного или нескольких чисел, то достаточно проверить, является ли каждое из этих чисел решением данного уравнения.

Пример 2.8. Решить уравнение

$$\lg\left(1 + \sqrt{x^2 - 4}\right) + 3x - x^2 - 1 = 3^{\sqrt{4-x^2}}$$

Решение.

Обе части уравнения определены только для тех x, которые удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} 4 - x^2 \geq 0 \\ 4 - x^2 \leq 0 \end{cases}$$

Решением системы являются $x_1 = -2, x_2 = 2$. Проверка показывает, что $x_2 = 2$ удовлетворяет данному уравнению, а $x_1 = -2 -$ нет.

Ответ:$x_2 = 2$

Пример 2.9. Решить неравенство.

$$(\sqrt{x^2 - 6x + 5} + 1)\log_5 \frac{x}{5} + \frac{1}{x}\left(\sqrt{12x - 2x - 10} + 1\right) > 0$$

Решение.

Обе части неравенства определены только для тех x, которые удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 6x + 5 \geq 0 \\ 12x - 2x^2 - 10 \geq 0 \end{cases}$$

Данной системе неравенств удовлетворяют лишь два числа: $x_1 = 1$ и $x_2 = 5$. Поэтому если данное неравенство имеет решения, то они могут быть только среди этих двух чисел. Проверка показывает, что число x_1не удовлетворяет неравенству, а число x_2 ему удовлетворяет. Следовательно, неравенство имеет единственное решение x_2

Ответ: x=5

Знание множества области определения может помочь в нахождении решений даже в случае, когда оно – бесконечное множество чисел.

Пример2.10.Решить неравенство.

$$4^{\sqrt{\cos x - 1}} + \log_3 \frac{x}{2\pi} > \cos x + 1$$

Решение.

Неравенство определено для x>0, при которых$\cos x \geq 1$. Учитывая, что $\cos x \leq 1,$ получим, что множество образует положительные x, для которых $\cos x = 1$, то есть для $x_k = 2\pi k, k\epsilon N$

Проверим, какие из них удовлетворяют данному неравенству. Так как

$$4^{\sqrt{\cos x - 1}} + \log_3 \frac{x}{2\pi} = 1 + \log_3 k \text{ и } \cos x_k + 1 = 2$$

Получим:

$$1 + \log_3 k > 2 \Leftrightarrow \log_3 k > 1 \Leftrightarrow k > 3$$

Ответ: $x = 2\pi k, k \geq 4$

- *Использование ограниченности функции*

Пусть левая часть уравнения F(x)=0 есть сумма нескольких функций$F(x) = f_{1(}(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x),$ каждая из которых неотрицательна для x из области ее существования. Тогда уравнение F(x)=0 равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases} f_1(x) = 0 \\ f_2(x) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ f_n(x) = 0 \end{cases}$$

Суть рассматривания подхода к решению уравнений и неравенств состоит в следующем:

Пусть множество М есть общая часть (пересечение) областей существования функции $f(x)$ и $g(x)$, и пусть для любого $x\epsilon M$справедливы неравенства $f(x) \geq A$ и $g(x) \leq A$, где A– некоторое число. Тогда уравнение $f(x) = g(x)$ или неравенство $f(x) \leq g(x)$ равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases} f(x) = A \\ g(x) = A \end{cases}$$

Пример 2.11. Решить уравнение

$$|x-3| + \left|\log_{0,7}(x^2 - 4x + 4)\right| = 0$$

Решение.

Это уравнение равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} x - 3 = 0 \\ \log_{0,7}(x^2 - 4x + 4) = 0 \end{cases}$$

Первое уравнение системы имеет единственное решение x=3, которое является также решением второго уравнения системы.

Следовательно, система, а значит, и равносильное ей уравнение имеет единственное решение.

Ответ: x=3

Пример 2.12. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2 - 7x + 12} + \lg^2(x^2 - 4x + 1) \leq 0$$

Решение.

Каждая из функций в левой части неравенства неотрицательна при $x\epsilon[3; 4]$ поэтому неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} x^2 - 7x + 12 = 0 \\ \lg^2(x^2 - 4x + 1) = 0 \end{cases}$$

Из корней первого уравнения системы x=3, x=4; только x=4 удовлетворяет второму уравнению, то есть неравенство имеет единственное решение.

Ответ: x=4

Пример 2.13. Решить уравнение.

$$|\log_5(x^2 - x + 1)| + 1 = cos^2(x\ sinx)$$

Решение.

Уравнение определено для всех действительных значений x, причем:

$$cos^2(x\ sinx) \leq 1; 1 + |\log_5(x^2 - x + 1)| \geq 1$$

Следовательно, данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} cos^2(x\ sinx) = 1 \\ |\log_5(x^2 - x + 1)| = 0 \end{cases}$$

Решениями второго уравнения системы являются $x_1 = 0; x_2 = 1$. Из этих чисел только число x_1 удовлетворяет первому уравнению системы.

Следовательно, исходное уравнение имеет единственное решение $x_1 = 0$

Ответ:$x_1 = 0$

Пример 2.14. Решить неравенство.

$$|\lg(x^2 + 2x + 2) + 5| \leq 4 - 2x - 2x^2$$

Обе части неравенства определены для всех действительных чисел x. Для любого $x \lg(x^2 + 2x + 2) + 5 = \lg((x + 1)^2 + 1) \geq 0$, поэтому $|\lg(x^2 + 2x + 2) + 5| \geq 5$; $4 - 2x - 2x^2 = 5 - (x + 1)^2 \leq 5$. Следовательно, неравенство $|\lg(x^2 + 2x + 2) + 5| \leq 4 - 2x - 2x^2$

Равносильно системе,

$$\begin{cases} |\lg(x^2 + 2x + 2) + 5| = 5 \\ 4 - 2x - 2x^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg x^2 + 2x + 2 = 2 \\ (x + 1)^2 = 0 \end{cases}$$

Единственное решение второго уравнения системы x=-1. Это число удовлетворяет первому уравнению этой системы и поэтому является решением равносильного системе неравенства.

Ответ: x=-1

- *Использование монотонности функций*

Напомним, непрерывная функция $f(x)$называется*строго монотонной*, если при $x_1 > x_2$выполняется условие $f(x_{1)} > f(x_2)$ или $f(x_{1)} < f(x_2)$т.е. в случае строгой монотонности неравенство для значений функции так же строгое.

Решение уравнений и неравенства с использованием строгой монотонности основано на утверждениях:

1. Если $f(x)$ – непрерывная, строго монотонная функция на интервале (a;b), то уравнение $f(x) = const$может иметь не более одного решения на этом интервале.
2. Если $f(x)$ и $g(x)$ – непрерывны на интервале (a;b), и имеют в нем разный характер строгой монотонности (одна из функций возрастает, другая убывает), то уравнение $f(x) = g(x)$может иметь не более одного решения на этом интервале.

В случае, когда определить характер или интегралы монотонности функции из общих соображений не удается, то такая задача решается с использованием производных.

Пример 2.15. Решить неравенство.

$$\sqrt[6]{x} + 2x^3 + \log_3(x+2) - \sqrt{1-x} < 4$$

Решение.

ОДЗ данного неравенства есть промежуток $0 \le x \le 1$.На ОДЗ функция $f(x) = \sqrt[6]{x} + 2x^3$+$\log_3(x+2) - \sqrt{1-x}$является непрерывной и строго возрастающей. Так как f(1)=4, то все значения x из множества $[0; 1)$удовлетворяет исходному неравенству.

Ответ: $0 \le x \le 1$

Пример 2.16. Решить уравнение.

$$\log_2(|x-1|+1) + \sqrt[3]{(x-4)^2} = 2$$

Решение.

Перепишем данное уравнение в виде

$$\log_2(|x-1|+1) + \sqrt[3]{(x-4)^2}$$

Рассмотрим непрерывные функции $f(x) = \log_2(|x-1|+1)$ и $g(x) = 2 - \sqrt[3]{(x-4)^2}$.Функция$f(x)$убывает на промежутке $(-\infty;1]$ возрастает на промежутке $[1;+\infty)$. Функция $g(x)$убывает на промежутке $[1;+\infty)$ и возрастает на промежутке $(-\infty;1]$. Так как на промежутке $[1;+\infty)$ функция$f(x)$ возрастает, а функция $g(x)$убывает и обе функции непрерывны, то на этом промежутке уравнение $f(x) = g(x)$может иметь не более одного корня. Легко проверить, что таким корнем является число x=2. Так как на промежутке $(-\infty;1]$ функция $f(x)$ убывает, а функция $g(x)$ возрастает и обе функции непрерывны, то на этом промежутке уравнение $f(x) = g(x)$ также может иметь не более одного корня. Легко видеть, что таким числом является число x=0. Итак, данное уравнение имеет два корня $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$.

Ответ: $x_1 = 0;\ x_2 = 2$

2.3. Использование числовых неравенств

Иногда применение того или иного числового неравенства к одной из частей уравнения (неравенства) позволяет заменить его равносильной ему системой уравнений. Часто применяется неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \text{где } a \geq 0, b \geq 0$$

(причем равенство здесь возможно лишь при $a = b$), и его следствия:

$$a + \frac{1}{a} \geq 2, \text{где } a > 0$$

(причем $a + \frac{1}{a}$ =2 тогда когда, $a = 1$).

Пример 2.17. Решить уравнение

$$\sqrt{x^2+2x+4} + \frac{4}{\sqrt{x^2+2x+4}} = 4 - log_3^4(x^2+x^4+1)$$

Решение:

ОДЗ этого уравнения есть все действительные числа. Переписав левую часть уравнения в виде

$$2\left(\frac{\sqrt{x^2+2x+4}}{2} + \frac{2}{\sqrt{x^2+2x+4}}\right)$$

замечаем, что она не меньше четырех, как сумма двух взаимно обратных положительных величин, и только при x =0 она равна четырем. В то же время правая часть при x =0 также равна четырем, а для всех $x \neq 0$ меньше четырех. Следовательно, $x = 0$ есть единственное решение уравнения.

Ответ: $x = 0$

Логарифмические уравнения и неравенства из вариантов ЕГЭ

Рассмотрим несколько примеров, предлагаемых учащимся во время подготовки к ЕГЭ.

В3.Найдите корень уравнения $\log_3(x-3) = 2$

Решение: ОДЗ: $x - 3 > 0$. Прологарифмируем число 2 и получим $\log_3(x-3)$=$\log_3 9$, используем метод потенцирования,после чего получим x – 3 = 9. Отсюда, x = 12

С3.Решите неравенство $\log_{\frac{3x-1}{x+2}}(2x^2+x-1) \geq \log_{\frac{3x-1}{x+2}}(11x-6-3x^2)$.

Решение: Находим область допустимых значений неравенства.

ОДЗ: $\begin{cases} 2x^2+x-1>0, \\ 11x-6-3x^2>0, \\ \dfrac{3x-1}{x+2}>0, \\ \dfrac{3x-1}{x+2}\neq 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-\frac{1}{2}; \text{и } x<-1 \\ \frac{2}{3}<x<3 \\ x<-2; \text{и } x>\frac{1}{3} \\ x\neq 1{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{x\notin\left(\frac{2}{3};\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2};3\right)\right.$

Воспользуемся условием равносильности для логарифмов с переменным основанием:

$\log_{\frac{3x-1}{x+2}}(2x^2+x-1)\geq\log_{\frac{3x-1}{x+2}}(11x-6-3x^2).\Leftrightarrow$

$\left(\dfrac{3x-1-x-2}{x+2}\right)\cdot\left(5x^2-10x+5\right)\geq 0$

$\dfrac{5\cdot(2x-3)\cdot(x^2-2x+1)}{x+2}\geq 0$

$\dfrac{5\cdot(2x-3)\cdot(x-1)^2}{x+2}\geq 0$

Используя метод интервалов и учитывая ОДЗ, получаем

Ответ: $\{1\}\cup(8;10)$

С3 Решите систему неравенств: $\begin{cases} \log_{3-x}\frac{x+4}{(x-3)^2}\geq -2 \\ x^3+6x^2+\frac{21x^2+3x-12}{x-4}\leq 3 \end{cases}$

Решение.

□1. Решим первое неравенство системы:

$$\log_{3-x}\frac{x+4}{(x-3)^2}\geq -2; \log_{3-x}(x+4)-\log_{3-x}(x-3)^2\geq -2;$$

$$\log_{3-x}(x+4)\geq 0$$

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0<3-x<1$

$\begin{cases}\log_{3-x}(x+4)\geq 0 \\ 0<3-x<1\end{cases}$ $\begin{cases}0<x+4\leq 1 \\ 2<x<3\end{cases}$ нет решений

Второй случай: $3-x>1$

$$\begin{cases}\log_{3-x}(x+4)\geq 0 \\ 3-x>1\end{cases}$$

$$\begin{cases}x+4\geq 1 \\ x<2\end{cases} \text{откуда } -3\leq X<2$$

Решение первого неравенства исходной системы: $-3\leq X<2$

2.Решим второе неравенство системы: $x^3+6x^2+\frac{21x^2+3x-12}{x-4}\le 3$, $x^3+6x^2+\frac{21x^2}{x-4}\le 0$

$$\frac{x^4+2x^3-3x^2}{x-4}\le 0, \frac{x^2(x-1)(x+3)}{x-4}\le 0$$

Решение второго неравенства исходной системы:$x\le -3$, $x=0$, $1\le x<4$

3. Решение исходной системы неравенств:$x=-3$, $x=0$, $1\le x<2$

Ответ: -3; 0; [1;2)

С3. Решите неравенство $\log_{|x+2|}(4+7x-2x^2)\le 2$.

Решение:

$\log_{|x+2|}(4+7x-2x^2)\le 2 \Leftrightarrow \frac{\log_2(4+7x-2x^2)}{\log_2|x+2|}-2\le 0 \Leftrightarrow$

$$\frac{\log_2(4+7x-2x^2)-\log_2|x+2|^2}{\log_2|x+2|-\log_2 1}\le 0 \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{(4+7x-2x^2)-(x+2)^2}{|x+2|-1}\le 0, \\ 4+7x-2x^2>0,\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{4+7x-2x^2-x^2-4x-4}{(x+2)^2-1^2}\ge 0, \\ 2x^2-7x-4<0,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{-3x^2+3x}{(x+1)(x+3)}\le 0, \\ -0{,}5<x<4,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{x(x-1)}{(x+1)(x+3)}\ge 0, \\ -0{,}5<x<4\end{cases}$$

Последняя система легко решается методом интервалов.

PS: В решении использованы и будут в дальнейшем использоваться условия равносильности в ОДЗ для решения логарифмических неравенств с числовым (переменным основанием)- см.С.И.Колесникова. «Математика. Решение сложных задач ЕГЭ»-М.АЙРИС ПРЕСС. 2006.:

$$1)\ \log_a f(x)>\log_a g(x) \Leftrightarrow \text{на ОДЗ } (a-1)\big(f(x)-g(x)\big)>0$$

$$2)\ \log_{a(x)} f(x)>(<)\log_{a(x)} g(x) \Leftrightarrow \text{ на ОДЗ } (a(x)-1)\big(f(x)-g(x)\big)>0$$

Ответ: $(-0{,}5;0]\cup[1;4)$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Решить уравнения 1 – 30:

1.	$\log_2 x = 4$	$\{16\}$
2.	$\lg x + 2 = 0$	$\{0{,}01\}$
3.	$\log_3(x-6) = 3$	$\{15\}$
4.	$\log_x(2-x) = 2$	$\varnothing$
5.	$\log_5(2x-1) = \log_5(x+3)$	$\{4\}$
6.	$\log_2(x+12) = 2\log_2 x$	$\{4\}$
7.	$\log_5 x - \log_5(6-x^2) = 0$	$\{2\}$
8.	$\log_4 \log_2 x = 0{,}5$	$\{4\}$
9.	$\lg(x+1{,}5) = -\lg x$	$\{0{,}5\}$
10.	$\log_5(x-1) + \log_5(x-2) = \log_5(x+2)$	$\{4\}$
11.	$\lg(x^2+100x) - \lg(x+4) = 2$	$\{20\}$
12.	$\lg x = 2 - \lg 5$	$\{20\}$
13.	$\log_3(x-8) = 2 - \log_3 x$	$\{9\}$
14.	$\lg(x+4) - \lg(x-3) = \lg 8$	$\{4\}$
15.	$\log_{x-1}(x^2-7x+41) = 2$	$\{8\}$
16.	$\log_5(x+4) - \log_5(1-2x) = -\log_5(2x+3)$	$\{-1\}$
17.	$\lg\sqrt{5x-4} + \lg\sqrt{x+1} = 2 + \lg 18$	$\{8\}$
18.	$\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = \frac{11}{12}$	$\{\sqrt{3}\}$
19.	$\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x = 6$	$\{27\}$
20.	$\log_2 x - \log_{0{,}5} x = 4$	$\{4\}$

21. $2\cdot\log_{16}^{2}x-\log_{16}x=0$ $\{1;\ 4\}$

22. $\lg^{2}x=3-2\lg x$ $\{0{,}001;\ 10\}$

23. $3\cdot\log_{4}^{2}x-5\cdot\log_{4}x^{2}+3=0$ $\{\sqrt[3]{4};\ 64\}$

24. $\log_{2}^{2}x^{3}-20\cdot\log_{2}\sqrt{x}+1=0$ $\{\sqrt[9]{2};\ 2\}$

25. $\dfrac{1}{5-\lg x}+\dfrac{2}{1+\lg x}=1$ $\{100;\ 1000\}$

26. $\log_{5}x+\log_{x}5=2$ $\{5\}$

27. $x^{1+\lg x}=100$ $\{0{,}01;\ 10\}$

28. $x^{\log_{2}x+4}=32$ $\{1/32;\ 2\}$

29. $\sqrt{1+\log_{2}x}+\sqrt{4\cdot\log_{4}x-2}=4$ $\{8\}$

30. $\log_{5}(x-2)+\log_{\sqrt{5}}(x^{3}-2)+\log_{0,2}(x-2)=4$ $\{3\}$

Найти произведение корней уравнений 31 – 35:

31. $3\log_{x}16-4\log_{16}x=2\log_{2}x$ 1

32. $\log_{x^{2}}16+\log_{2x}64=3$ $2\sqrt[3]{4}$

33. $\log_{3x}\dfrac{3}{x}+\log_{3}^{2}x=1$ $1/3$

34. $\log_{3}x\cdot\log_{9}x\cdot\log_{27}x\cdot\log_{81}x=\dfrac{2}{3}$ 1

35. $x^{\lg x}=100x$ 10

Найти сумму корней уравнений 36 – 40:

36. $2\cdot\log_{5}x+2\cdot\log_{x}5=5$ $25+\sqrt{5}$

37. $\dfrac{1}{4-\lg x}+\dfrac{2}{2+\lg x}=1$ 110

38. $(\lg x-5)\cdot\lg x^{3}+18=0$ 1100

39. $\log_{x+2}\left(2x^2+18-5x\right)=2$ 9

40. $\log_3\left(x^2-7x+21\right)=2$ 7

Решить системы уравнений 41 − 44:

41. $\begin{cases}\log_x y=2\\ \log_{x+1}\left(y+23\right)=3\end{cases}$ (2; 4)

42. $\begin{cases}2^{\log_2 y}-\log_2 x=1\\ y\cdot\log_2 x=2\end{cases}$ (2; 2)

43. $\begin{cases}\log_3\left(y-x\right)=0\\ x^2+y^2=25\end{cases}$ {(− 4; − 3), (3; 4)}

44. $\begin{cases}x-9y=6\\ \log_2 x+\log_2 y=3\end{cases}$ $\{12;\ 2/3\}$

Решить графически уравнения 45 – 48:

45. $\log_2 x=1-x$ 1

46. $\log_2 x-1=-x^2$ 1

47. $\log_2\left(x-1\right)=2$ 5

48. $\log_{0,5} x=2x$ 0,5

1. log0,5(2x+6)≥log0,5(x+8)
2. log8(3x−1)−log8(3−x)>0
3. log3√(x2−8)≥log3√(7x)
4. 8≥log0,51x−1
5. log0,5(3x−4)>−1

6. $\log 8x - \log 87 \geq -1$
7. $\log 2 \log 1/3(x-1) \geq 0$
8. $\log 2 \log 1/3 \log 5x > 0$
9. $\log x+2(5-x) < 1$
10. $\lg(x-3)+\lg x < \lg(9x2+4)$
11. $\log 22x+3\log 2x \leq 5\log 216 - -\sqrt{5}$
12. $2\log 3x \geq 1$

Список использованной литературы

1. Гусев В.А., А.Г. Мордкович. – М.: ООО «Издательство АСТ»: ООО «Издательство Астрель», 2003.- 671,[1] с.: ил.
2. Цыпкин А.Г. Справочник по математике для средней школы. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980 г.
3. БрадисВ.М. Четырехзначные математические таблицы: для средней школы – М.: Просвещение, 1988.-95с.
4. Лаппо Л.Д. ЕГЭ. Математика. Подготовка к ЕГЭ. М.: Издательство «Экзамен», 2013.-334,[2]с.
5. ЕГЭ- 2014.Математика: типовые экзаменационные варианты. Под редакцией А.Л. Семенова, И.В. Ященко.- М.: Издательство «Национальное образование», 2012.-80с.
6. Интернет – ресурсы